1. a) $I_0 = \int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1- e^{-1}$

b) $I_1 = \int_0^1 x e^{-x}\,dx$ on pose $u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$

et $v'(x) = e^{-x}$ donc $v(x) = -e^{-x}$ .

d'où $I_1 = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1-2e^{-1}$ .

2. a) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx$ on pose $u(x) = x^{n+1}$ alors $u'(x) = (n+1)x^n$

et $v'(x) = e^{-x}$ alors $v(x) = -e^{-x}$ .

donc $I_{n+1} = \left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{-x}dx = -e^{-1}+(n+1)I_n$ . Soit $I_{n+1} = -e^{-1}+(n+1)I_n$ .

b) On remplace n par 1 dans l'expression précédente, on obtient : $I_2 = -e^{-1} + 2I_1 = 2-5e^{-1}$

3. a) $0 \le x \le 1 \Rightarrow x^n \ge 0$ et $-1 \le -x \le 0 \Rightarrow 0 \le e^{-1} \le e^{-x} \le 1$

(car la fonction : $x \mapsto e^x$ est croissante)

D'où $0 \le x^n e^{-x} \le x^n$.

b) $0 \le x^n e^{-x} \le x^n . \Rightarrow 0 \le I_n \le \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ . Soit $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ .

c) $\frac{1}{n+1}$ tend vers0 lorsque $n \to +\infty$ d'où $I_n$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ .

© najah.com®